УДК 531.8

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ТЕЛ СИСТЕМЫ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

д.т.н. **Локтионов А.В.**

Витебский государственный технологический университет, Витебск

Ранее изучена механическая система при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси [1-6]. Однако моменты инерции системы рассматривались как постоянные величины Влияние сил инерции на движение тел механической системы не учитывалось. В работах [7-9] установлено, что моменты сил инерции системы применительно к отдельным телам действуют как моменты внешних сил, изменение осевого момента инерции является причиной появления моментов сил инерции. Установлено также, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил. Оценка влияния сил инерции на кинетические моменты тел системы, а также взаимосвязь момента кориолисовых сил инерции при движении тела массы m в радиальном направлении с изменением момента инерции системы и её угловой скоростью ω вращения системы является предметом самостоятельного рассмотрения.

Рассмотрим движение системы тел (рис. 1) при их вращении вокруг неподвижной оси при условии, что одно из тел системы перемещается в радиальном направлении, т.е. при условии, что момент инерции системы является величиной переменной.

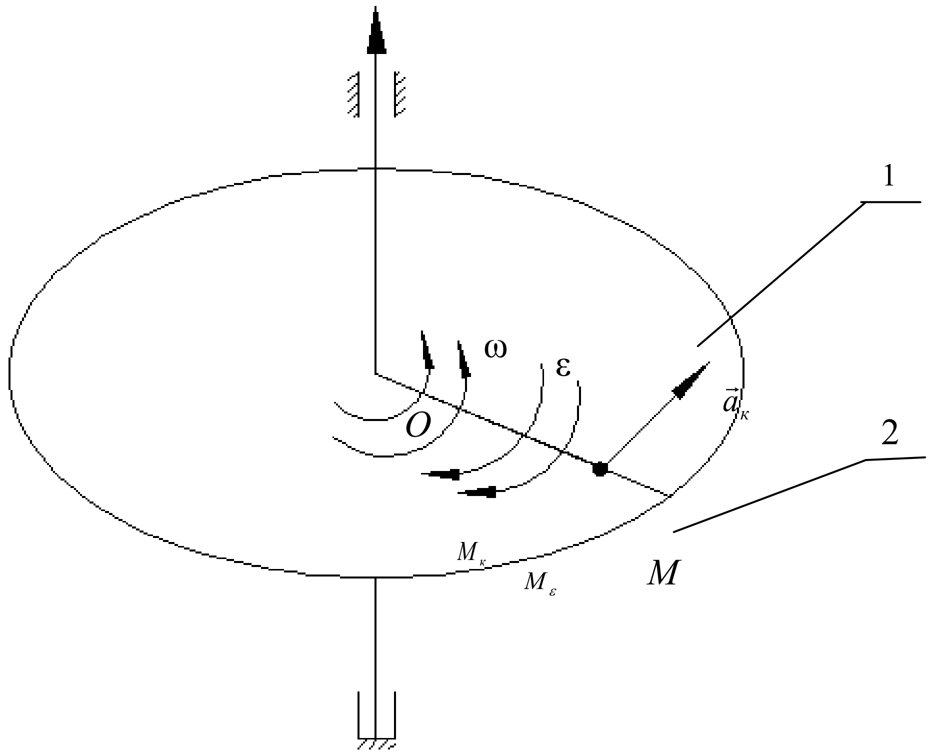

Рис. 1.

Система состоит из двух тел, одно из которых представляет собой диск, а второе – тело точечной массы. Диск характеризуется моментом инерции I_0, тело точечной массы – массой m. Тело 2 способно перемещаться в радиальном направлении (r=OM) по диску 1. Момент инерции системы

$$I = I_0 + mr^2 . \qquad (1)$$

Кинетический момент системы

$$L = I\omega. \tag{2}$$

Продифференцируем равенство (2), получим

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} + \frac{dI}{dt}\omega = M^e. \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что ускорение системы

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M^e - \frac{dI}{dt}\omega}{I}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что если $M^e = \frac{dI}{dt}\omega$, то $\frac{d\omega}{dt} = 0$, т.е. $\omega = const$; $M^e > \frac{dI}{dt}\omega$, то $\frac{d\omega}{dt} > 0$; $M^e < \frac{dI}{dt}\omega$, то $\frac{d\omega}{dt} < 0$.

Анализ уравнения (4) показывает, что ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил.

Дифференцируя уравнение (1), получим $\frac{dI}{dt} = 2mr\dot{\bar{r}} = 2mr\dot{r} = 2mr\upsilon$. (5)

Момент кориолисовых сил инерции при движении тела 2

$$M_к = 2m\left(\omega\dot{\bar{r}}\right)\cdot r = 2mr\upsilon\omega. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует, что $\frac{dI}{dt}\omega = M_к$. (7)

Полученная формула (7) определяет взаимосвязь геометрии масс с проявлением сил инерции. Установлено, что изменение осевого момента инерции, наряду с угловой скоростью, также является причиной появления моментов сил инерции. Изменение осевого момента инерции вызвано перемещением точки в радиальном направлении.

Рассмотрим влияние сил инерции отдельно на каждое тело системы.

Кинетический момент первого тела

$$L_1 = I_0\omega = I_0\frac{L}{I}; \tag{8}$$

второго тела

$$L_2 = (m\upsilon)\cdot r = mr^2\omega = mr^2\frac{L}{I}. \tag{9}$$

Тогда $I_0\frac{L}{I} + mr^2\frac{L}{I} = L$. Следовательно, соблюдается условие $L_1 + L_2 = L$.

При перемещении тела 2 на тело 1 действует кориолисова сила инерции и сила инерции углового ускорения. Производная от кинетического момента первого тела

$$\frac{dL_1}{dt} = -M_к - M_\varepsilon, \tag{10}$$

где $M_к = \frac{\dot{I}L}{I}$. Моменты реакций связей и силы тяжести равны нулю.

Найдем момент M_ε сил инерции углового ускорения. При этом $a_\tau = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt}r$; $\Phi_\tau = ma_\tau = m\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\cdot r$; $M_\varepsilon = (ma_\tau)\cdot r = m\frac{d\omega}{dt}r^2$, где $\omega = \frac{L}{I}$, а $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{I}\right) = L\frac{d}{dt}\left(I^{-1}\right) = -LI^{-2}\dot{I} = -\frac{\dot{I}}{I^2}L$.

Следовательно, $M_\varepsilon = -m\left(\frac{\dot I}{I^2}L\right)r^2 = -\frac{\dot I}{I^2}mr^2L$.

Представим уравнение (10) в виде

$$\frac{dL_1}{dt} = -\frac{\dot IL}{I} - \left(-\frac{\dot I}{I^2}mr^2L\right) = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot I}{I^2}mr^2L = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot IL}{I^2}\left(mr^2 + I_0 - I_0\right) = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot IL}{I} - \frac{\dot I}{I^2}LI_0.$$

Тогда $\frac{dL_1}{dt} = -\frac{\dot ILI_0}{I^2}$. Откуда $L_1 = -I_0L\int\frac{\dot I}{I^2}dt$. Введем замену $\frac{1}{I} = Z$; $-\frac{\dot I}{I^2}dt = dZ$; $L_1 = --I_0L\int dZ = I_0LZ + c = \frac{I_0L}{I} + c$. При *t=0* $L_1 = \frac{I_0L}{I_0+mr^2}$, $I = I_0+mr^2$. Откуда *c=0*.

Окончательно получим $L_1 = \frac{LI_0}{I}$, что соответствует (8).

Следовательно, моменты инерции сил системы применительно к отдельным телам системы действуют как моменты внешних сил.

Рассмотрим влияние сил инерции на тело 2. Производная от кинетического момента второго тела

$$\frac{dL_2}{dt} = M_\kappa + M_\varepsilon = \frac{\dot IL}{I} - \frac{\dot I}{I^2}mr^2L = \frac{\dot IL}{I} - \frac{\dot I}{I^2}L\left(mr^2 + I_0 - I_0\right) = \frac{\dot IL}{I} - \frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot I}{I^2}LI_0 = \frac{\dot ILI_0}{I^2}.$$

Тогда $\frac{dL_2}{dt} = \frac{\dot ILI_0}{I^2}$.

Решая данное уравнение $L_2 = I_0L\int\frac{\dot I}{I^2}dt$ и введя замену $\frac{1}{I} = Z$; $\frac{\dot I}{I^2}dt = -dZ$, получим $L_2 = -I_0L\int dZ = -I_0LZ + c = -\frac{I_0L}{I} + c$. При *t=0* $L_2 = \frac{mr^2L}{I_0}$. Откуда $c = L$, а $L_2 = L - \frac{LI_0}{I} = L - L_1$. Следовательно, и в рассматриваемом случае соблюдаются условия $L_1 + L_2 = L$ [9].

Рассмотрим влияние направления моментов сил инерции на расчет кинетического момента тела 2 при условии, что момент M_k кориолисовых сил инерции и момент M_ε сил инерции углового ускорения направлены так же, как и при рассмотрении влияния сил инерции на тело 1 при перемещении тела 2 в радиальном направлении. Тогда производная от кинетического момента второго тела

$$\frac{dL_2}{dt} = -M_\kappa - M_\varepsilon = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot I}{I^2}mr^2L = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot I}{I^2}L\left(mr^2 + I_0 - I_0\right) = -\frac{\dot IL}{I} + \frac{\dot IL}{I} - \frac{\dot I}{I^2}LI_0 = -\frac{\dot ILI_0}{I^2}.$$

Следовательно, $\frac{dL_2}{dt} = -\frac{\dot ILI_0}{I^2}$. Решая данное уравнение $L_2 = -I_0L\int\frac{\dot I}{I^2}dt$ и введя замену $\frac{1}{I} = Z$; $\frac{\dot I}{I^2}dt = -dZ$, получим $L_2 = I_0L\int dZ = I_0LZ + c = \frac{I_0L}{I} + c$.

При $t = 0$ $L_2 = \frac{mr^2L}{I_0 + mr^2}$. Откуда $c = \frac{L\left(mr^2 - I_0\right)}{I_0 + mr^2}$, а

$$L_2 = \frac{LI_0}{I} + \frac{L\left(mr^2 - I_0\right)}{I_0 + mr^2} = \frac{LI_0}{I} + \frac{Lmr^2}{I} - \frac{LI_0}{I} = \frac{L\left(I_0 + mr^2\right)}{I} - \frac{LI_0}{I} = L - L_1.$$

Из расчета следует, что при отрицательных значениях моментов сил инерции соблюдается равенство $L_2 = L - L_1$ и условие $L_1 + L_2 = L$.

Из рассмотренного следует, что при оценке влияния направления моментов сил инерции на тело 2, перемещающееся в радиальном направлении тела 1, и расчете его кинетического момента необходимо знать только численные значения моментов сил инерции $M_к$ и $M_ε$. Как при положительных, так и отрицательных значениях моментов сил инерции для тела 2 точечной массы, участвующего в сложном движении, соблюдается равенство $L_1 + L_2 = L$.

Следовательно, направления моментов сил инерции для второго тела не влияют на расчет его кинетического момента $L_2 = L - L_1$ [10].

Вывод. При исследовании кинетических моментов тел системы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси при условии, что момент инерции системы является переменной величиной, установлено, что изменение осевого момента инерции наряду с угловой скоростью вращения системы является причиной появления моментов сил инерции, а моменты сил инерции системы применительно к отдельным телам действуют как моменты внешних сил. Установлено также, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил.

При оценке влияния направления моментов сил инерции на расчет кинетического момента тела, перемещающегося в радиальном направлении вращающегося диска, установлено, что расчетное значение кинетического момента не зависит от направления моментов сил инерции и определяется из равенства $L_2 = L - L_1$.При этом, как и для диска, соблюдается $L_1 + L_2 = L$.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Москва : Высшая школа, 1983. – 528 с.*

2 Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механике / С. М. Тарг. – Москва : Высшая школа, 2003. – 416 с.: ил.

3 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. В 2 т. Т.2 / А. А. Яблонский, В. А. Никифоров. – Москва : Высшая школа, 1984. – 423 с.

4 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. Динамика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург : Лань, 2006. – 736 с.

5 Гернет, М. М. Курс теоретической механики : учебник для вузов / М. М. Гернет. – Москва : Высшая школа, 1981. – 440 с.

6 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва : Наука, 1984. – 560 с.

7 Локтионов, А. В. Исследование кинетических моментов тел системы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси / А. В. Локтионов, А. С. Соколова // Материалы докладов XLII науч.-техн. конф. преподавателей и студентов университета / УО «ВГТУ». – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – С. 63 – 66.

8 Локтионов, А. В. Оценка методов расчета уравнения относительного радиального перемещения тела по вращающемуся диску / А. В. Локтионов, А. С. Соколова // Теоретическая и прикладная механика : Междунар. науч.-техн. журнал. – Минск, 2010. – № 25. – С.103-106.

9. Локтионов, А. В. Исследование механической системы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси / А.В. Локтионов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. Вып. 7 / Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2013.- С. 185-189.

10. Локтионов, А. В. Оценка влияния направления моментов сил инерции на расчет кинетического момента тела, перемещающегося в радиальном направлении вращающегося диска / А.В. Локтионов // Материалы докладов 46 Республиканской научно-техн. конф. преподавателей и студентов. – Витебск : УО «ВГТУ», 2013. – С.324-325.

E-mail: vstu@vitebsk.by

Поступила в редакцию 13.09.2016.